Adı Soyadı: 07.07.2021
Numarası:

2020-2021 BAHAR DÖNEMİ CEBİR II BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI

1) $\forall a,b\in\mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$: Tam Sayılar) için $a\oplus b=a+b+1$ ve $a\odot b=ab+2a+b+1$ ile $\mathbb{Z}$ üzerinde $\oplus$ ve $\odot$ işlemleri tanımlanıyor. $(\mathbb{Z},\oplus,\odot)$ bir halkadır.

   a) $(\mathbb{Z},\oplus,\odot)$ halkası birimli olur mu?
   b) $(\mathbb{Z},\oplus,\odot)$ halkası değişmeli olur mu?
   c) $(\mathbb{Z},\oplus,\odot)$ halkası sıfır bölensiz olur mu?

2) a) $R=\mathbb{Z}$ ve $A_1=6\mathbb{Z}$, $A_2=4\mathbb{Z}$ olmak üzere

$$\theta:\ R/A_1\cap A_2\to R/A_1\times R/A_1$$

dönüşümü örten midir?

   b) M birimli bir halka $h:\ M\to N$ örten homomorfizma olsun. $m\in M$ birimsel olduğuna göre $m\notin Çek\,h$ ise $h(m)$ nin N de birimsel olduğunu gösteriniz.

3) a) R birimli bir halka I R'nin bir ideali olsun. J, R'nin terslenebilir elemanlarının bir kümesi olmak üzere $I\cap J\neq\varnothing$ ise $I=R$ olduğunu gösteriniz.

   b) $\mathbb{Z}_{109}[x]/(x^3+16)$ cisim olur mu? Belirleyiniz.

4) $\mathbb{Z}_{11}[x]$ de $f(x)=x^3+x^2+1$ ve $g(x)=3x^5+2x^3+4x^2+x+1$ polinomlarının ebobunu bulunuz ve polinomların ebobu $d(x)$ olmak üzere

$$d(x)=s(x)f(x)+t(x)g(x)$$

olacak şekilde $s(x)$ ve $t(x)$ polinomlarını belirleyiniz.

5) a) $5i+6\in\mathbb{Z}[i]$ indirgenemez eleman olur mu? Belirleyiniz.

   b) $f(x)=2x^4+21x^3+68x^2+69x+12$ polinomunun $\mathbb{Z}[x]$ halkasında asal olup olmadığını araştırınız

Prof. Dr. Şenol EREN
Başarılar

Cebir II Bütünleme Cevap Anahtarı

1) $\forall a,b \in \mathbb{Z}$ $\quad a \oplus b = a+b+1$ ve

$a \odot b = ab+2a+b+1$

ile $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ halka old. biliniyor.

a) Halka birimli olur mu? Bunun için

$\forall a \in \mathbb{Z}$ için $a \odot e = a$ ve $e \odot a = a$ o.ş $e \in \mathbb{Z}$ bulmalıyız.

$ae+2a+e+1 = a$ ve $ea+2e+a+1 = a$

$\Rightarrow ae+a+e+1 = 0$ $\qquad \Rightarrow ea+2e+1 = 0$

$\Rightarrow a(e+1)+e+1 = 0$ $\qquad \Rightarrow e(a+2)+1 = 0$

$\Rightarrow (a+1)(e+1) = 0$ $\qquad \Rightarrow e(a+2) = -1$

$\Rightarrow e = -1$ $\qquad \Rightarrow e = -\frac{1}{a+2}$

$\forall a \in \mathbb{Z}$ için bu koşulu sağlayan $e \in \mathbb{Z}$ olmadığından halka birimli değildir.

b) $\forall a,b \in \mathbb{Z}$ için $a \odot b = b \odot a$ oluyor ise halka değişmeli olur.

$$\left.\begin{aligned} a \odot b &= ab+2a+b+1 \\ b \odot a &= ba+2b+a+1 \end{aligned}\right\} \text{ buradan } a \odot b \neq b \odot a \text{ olup}$$

halka değişmeli değildir.

c) Halka sıfır bölensiz olur mu? Bunun için halkanın sıfırını bulalım.

$a \oplus 0_R = a \Rightarrow a+0_R+1 = a \Rightarrow 0_R = -1$ olur.

O halde $a \neq -1$ ve $a \odot b = 0_R = -1$ olsun.

$a \odot b = -1 \Rightarrow ab+2a+b+1 = -1$

$\Rightarrow a(b+2)+b+2 = 0$

$\Rightarrow (a+1)(b+2) = 0$

$\Rightarrow b+2 = 0 \Rightarrow b = -2 \neq 0_R$ olup halka sıfır bölenlidir ya da 2. Yol olarak

$a = 1 \neq 0_R$ ve $b = -2 \neq 0_R$ alınırsa

$a \odot b = 1 \odot -2 = -2 + 2 + -2 + 1 = -1 = 0_R$

olur yani 1 ve -2 halkanın sıfır bölen elemanlarıdır. Yani halka sıfır bölenlidir

2) a) $R = \mathbb{Z}$, $A_1 = 6\mathbb{Z}$, $A_2 = 4\mathbb{Z}$

$\theta : R/_{A_1 \cap A_2} \longrightarrow R/_{A_1} \times R/_{A_2}$ dönüşümü

örten olur mu?

$\left| R/_{A_1 \cap A_2} \right| = 12$, $\left| R/_{A_1} \right| = 6$, $\left| R/_{A_2} \right| = 4$

Buradan $\left| R/_{A_1} \times R/_{A_2} \right| = 24$ bulunur.

Dolayısıyla örten değildir

b) M birimli bir halka $m \in M$ birimsel ise $m \notin$ Çek h ise

$mn = n.m = 1_M$ o.ş $n \in M$ vardır.

$h(m) \neq 0_N$ dır

h homomorfizma old. $mn = 1_M \Rightarrow h(mn) = h(m).h(n) = h(1_M)$

olup h örten old ise $\Rightarrow h(1_M) = 1_N$ dır.

O halde

$h(mn) = h(m)h(n) = h(n).h(m) = 1_N$ o.ş $h(n) \in N$ var

Yani $h(m)$, N de birimseldir

3) a) $I \cap J \neq \emptyset \Rightarrow \exists a \in I \cap J$

$\Rightarrow a \in I \wedge a \in J$

(I, J alt halka ve dolayısıyla halka) $\Rightarrow a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1_R$ öş $a^{-1} \in R$ vardır

I, R'nin ideali $\Rightarrow a.a^{-1} \in I$

$\Rightarrow 1_R \in I$

(ideal halkanın birimini içeriyor ise halkaya eşittir) $\Rightarrow I = R$

b) $\mathbb{Z}_{109}[x] / (x^3+16)$ cisim olur mu?

Bunun için (x^3+16) idealinin $\mathbb{Z}_{109}[x]$ de maksimal olması gerekir. $\mathbb{Z}_{109}$ cisim old. $\mathbb{Z}_{109}[x]$ T.İ.B olup asal ve maksimal ideal çakışır. O halde biz x^3+16 $\mathbb{Z}_{109}[x]$ de asal olur mu? Araştıralım. $\mathbb{Z}_{109}[x]$ için

$x^3+125 \equiv x^3+16$ yazılabilir O halde $x=-5$ bu polinomun bir köküdür $(x+5)$ bu polinomun bir çarpanıdır Yani x^3+16 $\mathbb{Z}_{109}[x]$ de asal değildir O halde

$\mathbb{Z}_{109}[x] / (x^3+16)$ cisim değildir

4

4) $3x^5+2x^3+4x^2+x+1 \;\Big|\; x^3+x^2+1$ $\qquad \mathbb{Z}_{11}[x]$ de

$-\;3x^5 \mp 3x^4 \mp 3x^2 \qquad\qquad 3x^2+8x+5$

$8x^4+2x^3+x^2+x+1$

$\vdots$

$-$

$7x^2+4x+7$

$$\boxed{g(x)=f(x)\,(3x^2+8x+5)+7x^2+4x+7}$$

$x^3+x^2+1 \;\Big|\; 7x^2+4x+7$

$\qquad\qquad 8x+5$

$-$

$x+10$

$$\boxed{f(x)=(7x^2+4x+7)\,(8x+5)+x+10}$$

$7x^2+4x+7 \;\Big|\; x+10$

$\qquad\qquad 7x$

$-$

7

$$\boxed{7x^2+4x+7=(x+10)\,7x+7}$$

$x+10 \;\Big|\; 7$

$\qquad\qquad 8x+3$

$-$

0

Buradan sıfırdan önceki en son kalan ebob olacağından $d(x)=7$ bulunur.

Buradan ebobu çeke çeke gidersek

$$7=\underbrace{7x^2+4x+7}_{u(x)\text{ diyelim}}-(7x).(x+10)$$

yani $u(x)=7x^2+4x+7$ olsun.

$7 = u(x) - 7x\,(x+10)$

$7 = u(x) - 7x \cdot (f(x) - u(x)(8x+5))$

$7 = u(x) - 7x\, f(x) + 7x \cdot (8x+5) \cdot u(x)$

$7 = (1+x^2+2x)\, u(x) + 4x \cdot f(x)$

$7 = (1+x^2+2x)\,(g(x) - f(x) \cdot (3x^2+8x+5)) + 4x f(x)$

$7 = (x^2+2x+1) \cdot g(x) + (x^2+2x+1) \cdot (8x^2+3x+6) f(x)$

$+4x \cdot f(x)$

$7 = (x^2+2x+1)\, g(x) + (8x^4+8x^3+9x^2+4x+6+4x) f(x)$

$7 = (x^2+2x+1)\, g(x) + (8x^4+8x^3+9x^2+8x+6)\, f(x)$

$d(x) = 7 = (x^2+2x+1)\, g(x) + (8x^4+8x^3+9x^2+8x+6)$

$d(x) = 7,\quad s(x) = 8x^4+8x^3+9x^2+8x+6$

$t(x) = x^2+2x+1$

5) a) $\mathbb{Z}[i]$ TAG bölge oldğundan ve TAG bölgelerde asallık ve indirgenemez eleman aynı oldğundan $5i+6 \in \mathbb{Z}[i]$ ~~indirgenemez~~ indirgenemez eleman olur mu?

$5i+6 = \alpha \cdot \beta \quad \Rightarrow d(5i+6) = d(\alpha) \cdot d(\beta)$

$\Rightarrow 61 = d(\alpha) \cdot d(\beta)$

$\Rightarrow d(\alpha) = 1, \cancel{61}$

α ve β birimseldir yani $5i+6$ indirgenemez elemandır. O halde aynı zamanda asal elemandır.

b) $f(x) = 2x^4+21x^3+68x^2+69x+12$

polinomuna Eisenstein uygulanamaz.

$f(x-2) = 2(x-2)^4 + 21(x-2)^3 + 68(x-2)^2 + 69(x-2) + 12$

$= 2(x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16) + 21(x^3 - 6x^2 + 12x - 8)$

$+ 68(x^2 - 4x + 4) + 69(x-2) + 12$

$= 2x^4 + 5x^3 - 10x^2 - 15x + 10$

olup $p=5$ alınırsa Eisenstein'a göre

i) $5 | 10,\ 5 | -15,\ 5 | -10,\ 5 | 5$

ii) $5 \nmid 2$

iii) $25 \nmid 10$

$f(x-2)$ asaldır. O halde $f(x)$ de $\mathbb{Q}[x]$ de asaldır. Polinom ilkel old. $\mathbb{Z}[x]$ de de asaldır.